Diferenciál a Taylorův polynom

Příklad 1. Vypočtěte diferenciál funkce:

$$f(x) = x\sin 2x$$
$$f(x) = \operatorname{arctg} 3x$$
$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

[Ve všech případech vyjde $f'(x)dx$.]

Příklad 2. Vypočtěte diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0 pro přírůstek dx: (a) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 2$, $dx = 0,1$, [Vyjde 0.5]
(b) $f(x) = x^3$, $x_0 = 4$, [Vyjde $48dx$]
(c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $x_0 = 3$, $dx = 0,3$, [Vyjde $\frac{0.3}{\sqrt{10}}$]

Příklad 3. Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x)$ stupně n se středem v bodě x_0:
(a) $f(x) = \ln x$, $n = 4$, $x_0 = 4$, [$T = \ln 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}(x-4)^2 + \frac{1}{192}(x-4)^3 - \frac{1}{1024}(x-4)^4$],
(b) $f(x) = xe^{-x}$, $n = 4$, $x_0 = 0$, [$T = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$],
(c) $f(x) = x^x - 1$, $n = 3$, $x_0 = 1$, [$T = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3$].

Příklad 4. Vyjádřete polynom $P(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ v mocninách $(x-2)$. [Vyjde: $P(x) = -5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$]

Příklad 5. Vypočtěte $\operatorname{arctg} 1,7$ pomocí vhodného Taylorova polynomu třetího stupně a porovnejte s přesnou hodnotou spočtenou na kalkulačce.
[Řešení: Zvolíme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $n = 3$. Vyjde $T = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3$. Na kalkulačce spočteme $\operatorname{arctg} 1.7 = 1.039072$, zatímco $T(1.7) = 1.0414814$.]

Příklad 6. Vypočtěte $\cos 5^o$ s přesností 10^{-6}!
[Řešení: Je nabíledni, že $f(x) = \cos x$. Musíme dále určit střed x_0 a stupeň n Taylorova polynomu. Anžto 5^o je $\frac{\pi}{36}$ radiánů, což je číslo blízké nule, tak zvolíme $x_0 = 0$ a použijeme notoricky známý Taylorův polynom funkce $\cos x$ se středem v bodě $x_0 = 0$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R(x),$$

kde

$$R(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

kde $\xi \in < x_0, x >$, tj. v našem případě $\xi \in < 0, \frac{\pi}{36} >$. Abychom určili počet členů n, tak odhadneme zbytek takto:

$$|R(x)| \leq \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|. \tag{1}$$

(neboť pro libovolné ξ platí $|\cos\xi| \leq 1$. Do pravé části nerovnosti (1) dosadíme za x hodnotu $\frac{\pi}{36}$ a hledáme takové n, aby $|R(x)| \leq 10^{-6}$. Nerovnosti $|R(\frac{\pi}{36})| \leq 10^{-6}$ vyhovuje $n = 2$, takže

stačí vzít aproximaci tvaru
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$
Dosazením $\frac{\pi}{36}$ do pravé, strany předchozího vzorce dostaneme hodnotu 0.996195.]

Příklad 7. Vypočtěte číslo e s chybou menší než $\frac{1}{1000}$.
[Řešení: Není nic jasnějšího, že $f(x) = \mathrm{e}^x$. Číslo e dostaneme pro $x = 1$, takže zvolíme střed $x_0 = 0$. Budeme tedy mít Taylorův polynom tvaru
$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R(x)$$
kde $R(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^\xi$, $\xi \in< 0, 1 >$. Zbývá určit počet členů n. Nerovnost $R(1) < \frac{1}{1000}$ vede k nerovnosti $\frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$. Protože $\xi < 1$, tak $\mathrm{e}^\xi < \mathrm{e} < 3$. Nerovnosti $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$ vyhovuje číslo $n = 6$. Máme tedy
$$\mathrm{e} \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

Příklad 8. Vypočtěte hodnotu $\sqrt[4]{83}$ s přesností 10^{-6}.
[Řešení:
$$\sqrt[4]{83} = \sqrt[4]{81 + 2} = 3(1 + \frac{2}{81})^{\frac{1}{4}}$$
takže použijeme Taylorův polynom funkce $f(x) = (1 + x)^s$. Analogicky jako v předchozím příkladě odhadneme zbytek a vyjde nám, že stačí vzít první čtyři členy Taylorova polynomu
$$(1 + x)^s \approx 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3.$$
Dosazením $x = \frac{2}{81}$, $s = \frac{1}{4}$ vyjde 3.01835.]